Chapitre X

RAPPELS DE MÉCANIQUE DU POINT.

La lecture de ce chapitre ne se substituera en aucune façon à la révision du cours de PCSI. Il ne s'agit ici que de rappeler une axiomatique minimaliste nécessaire pour aborder efficacement la mécanique du solide. N'y seront pas abordés les points sui-vants : les forces d'inertie dans les référentiels non galiléens, les référentiels de Copernic*, de* Foucault *et terrestre, la notion de masse réduite pour un système à deux points, les mouvements à force centrale. Par ailleurs les lois de la physique des systèmes de plus de deux points seront revus dans les chapitres suivants qui concernent le solide.*

X-1 Point matériel. Référentiels galiléens.

On postule l'existence de particules de taille infiniment petite, appelées *points matériels*. La matière, dans ce modèle, est un assemblage de points matériels.

On postule l'existence de référentiels privilégiés dans lesquels tout point matériel *isolé* (c'est-à-dire ne subissant aucune interaction) a un mouvement rectiligne uniforme. On les appelle *référentiels inertiels* ou *galiléens*.

Sauf mention explicite du contraire, tous les théorèmes de mécanique dans ce cours sont énoncés pour un référentiel galiléen.

X-2 Système isolé de deux points matériels en interaction.

X-2.a Masse et quantité de mouvement.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, c'est à dire que les deux points exercent une action l'un sur l'autre, mais ne subissent l'action d'aucun autre point matériel. On note $\overrightarrow{v}_A(t)$ et $\overrightarrow{v}_B(t)$ leur vitesse.

On postule que chacun des points est caractérisé par un scalaire strictement positif et immuable, appelé *masse inertielle*[1] , noté m_A et m_B, tel que la quantité :

$$m_A \overrightarrow{v}_A(t) + m_B \overrightarrow{v}_B(t)$$

reste constante au cours du temps.

Cette quantité est appelée *quantité de mouvement* du système et notée $\overrightarrow{p}$. De même, $\overrightarrow{p}_A = m_A \overrightarrow{v}_A(t)$ est la quantité de mouvement du point A et $\overrightarrow{p}_B = m_B \overrightarrow{v}_B(t)$, celle du point B.

Le postulat peut donc se formuler comme une loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé de deux points.

X-2.b Force. Action et réaction.

Rien ne prouve par contre que la quantité de mouvement de A, ni celle de B, se conserve.

On définit la *force* exercée par A sur B par :

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_B \overrightarrow{v}_B) = m_B \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_B}{\mathrm{d}t}$$

et de même, la force exercée par B sur A par :

$$\overrightarrow{F}_{B\to A} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_A \overrightarrow{v}_A) = m_A \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_A}{\mathrm{d}t}$$

Comme la quantité de mouvement totale se conserve, on en déduit immédiatement que :

$$\overrightarrow{F}_{B\to A} = -\overrightarrow{F}_{A\to B}$$

Il s'agit du théorème d'*action et réaction*.

A ce stade reste à la charge des expérimentateurs et théoriciens de dégager et axiomatiser des lois de forces formulant la force en fonctions des points et de leurs mouvements.

De ces définitions et en notant $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{A\to B}$, on déduit aisément que :

$$\overrightarrow{p}_B(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{p}_B(t) + \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t$$

[1] La *masse gravitationnelle* est le coefficient qui apparaît dans la loi d'attraction universelle. En mécanique newtonienne, il n'y a aucune raison *a priori* que ces masses soient égales, mais l'expérience prouve qu'elles le sont. Seule la théorie de la relativité générale propose une explication en disant que les corps massiques déforment l'espace.

et

$$\overrightarrow{p}_A(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{p}_A(t) - \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t$$

Plutôt que dire que la quantité de mouvement totale se conserve, on peut aussi dire que pendant $\mathrm{d}t$, A et B échangent la quantité de mouvement élémentaire $\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t$. De façon générale, toute loi de conservation pour un système pourra être reformulée en loi d'échange ; on ne le fera pas systématiquement dans ce cours, mais il faudra le garder à l'esprit.

X-3 Moment cinétique.

X-3.a Définition et propriétés.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B, voire d'autres) de masse m_A, de vitesse $\overrightarrow{v}_A$ et donc de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_A = m_A\,\overrightarrow{v}_A$. Soit un point M immobile. On définit le *moment cinétique* de A, calculé en M par :

$$\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A$$

plus exactement le moment cinétique est le champ vectoriel $\overrightarrow{\sigma}_A$ que l'expression ci-dessus définit par sa valeur en chaque point M. De cette formule résulte une «formule de changement de point» permettant de lier les valeurs du champ de moment cinétique en deux points différents, disons M et M'. On a :

$$\overrightarrow{\sigma}_A(M') - \overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{M'A} \wedge \overrightarrow{p}_A - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A =$$
$$(\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{MA}) \wedge \overrightarrow{p}_A = (\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{p}_A = \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{p}_A$$

Retenons :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_A(M') = \overrightarrow{\sigma}_A(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{p}_A}$$

Attention : le moment cinétique de A, calculé en M, fait référence à deux points et là où j'écris $\overrightarrow{\sigma}_A(M)$, d'autres écrivent $\overrightarrow{\sigma}_M(A)$. Ma notation est minoritaire, mais utilisée dans certaines épreuves de concours. J'ai par ailleurs de sérieuses raisons de m'y tenir et les auteurs les plus sérieux l'utilisent, c'est pourquoi je persiste.

X-3.b Moment dynamique.

Dérivons $\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A$ par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}_A$$

soit avec $\mathrm{d}\overrightarrow{MA}/\mathrm{d}t = \overrightarrow{v_A}$ car M est un point fixe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{v_A} \wedge \overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_A$$

soit puisque $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{p_A}$ sont parallèles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_A$$

On appelle moment dynamique exercé sur le point A le champ dont la valeur en un point M est :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_A$$

On démontre de la même façon que pour le moment cinétique la formule de changement de point :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M') = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{F}_A}$$

Retenons surtout le théorème du moment cinétique, **valable pour un point M fixe** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M)}$$

X-3.c Conservation du moment cinétique.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, son moment cinétique est la somme des moments cinétiques des deux points, d'où pour tout point M :

$$\overrightarrow{\sigma}(M) = \overrightarrow{\sigma}_A(M) + \overrightarrow{\sigma}_B(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{p}_B$$

On postule que le moment cinétique d'un système isolé de deux points en interaction se conserve.

Voyons-en la conséquence :

$$\overrightarrow{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}(M) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_B(M) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_B(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_{B\to A} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B}$$

soit en tenant compte du théorème d'action et réaction :

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B} = (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F}_{A\to B}$$

On en déduit que $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$; dans cette axiomatique, la force d'interaction entre deux points est toujours parallèle à la droite qui les joint.

X-4 Energie cinétique.

X-4.a Définition.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B, voire d'autres) de masse m_A, de vitesse $\overrightarrow{v}_A$, on définit l' *énergie cinétique* de A par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\, m_A\, \overrightarrow{v}_A^2$$

X-4.b Puissance.

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin\,A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, m_A\, \overrightarrow{v}_A^2\right) = m_A\, \overrightarrow{v}_A . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v}_A = \overrightarrow{v}_A . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}_A = \overrightarrow{v}_A . \overrightarrow{F}_A$$

On appelle *puissance* exercée par $\overrightarrow{F}_A$ sur A la quantité :

$$\mathcal{P}_A = \overrightarrow{F}_A . \overrightarrow{v}_A$$

On en déduit le théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin\,A} = \mathcal{P}_A}$$

X-4.c Energie potentielle.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, son énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des deux points, soit :

$$E_{cin} = E_{cin\,A} + E_{cin\,B} = \frac{1}{2}\, m_A\, \overrightarrow{v}_A^2 + \frac{1}{2}\, m_B\, \overrightarrow{v}_B^2$$

Dérivons par rapport au temps en tenant compte du théorème d'action et réaction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} = \mathcal{P}_A + \mathcal{P}_B = \overrightarrow{F}_{B\to A} . \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{F}_{A\to B} . \overrightarrow{v}_B = \overrightarrow{F}_{A\to B} . (\overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} = \overrightarrow{F}_{A\to B} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{F}_{A\to B} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{AB}$$

La suite va nous prouver que, contrairement à la quantité de mouvement et au moment cinétique, l'énergie ciinétique n'est pas une *grandeur conservative*. Posons $\overrightarrow{AB} = r\, \overrightarrow{u}$ où $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overrightarrow{u}$ est unitaire ; et, puisque $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F}_{A\to B} = F\, \overrightarrow{u}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin} = F\, \overrightarrow{u} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\, \overrightarrow{u}) = F\, \overrightarrow{u} . (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\, \overrightarrow{u} + r\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}) = F\, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\, \overrightarrow{u}^2 + F\, r\, \overrightarrow{u} . \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}$$

Or $\overrightarrow{u}$ est unitaire, d'où $\overrightarrow{u}^2 = 1$ et en dérivant cette relation $2\,\overrightarrow{u}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u} = 0$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = F\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

L'énergie cinétique ne se conserve donc que si la distance r entre les points est constante (ce sera important pour la mécanique du solide). Pour les autres cas, on essaie le plus possible de remplacer les équations différentielles de la mécanique par des lois de conservation, plus aisées à manipuler. C'est possible si la loi d'interaction est isotrope c'est-à-dire si F ne dépend que de r mais pas de la direction de $\overrightarrow{u}$. Alors $F = F(r)$ et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = F(r)\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Si l'on note $U_{AB}(r)$ l'opposé de la primitive de $F(r)$, qu'on appelera *énergie potentielle* (et on dira que $\overrightarrow{F}$ dérive du potentiel U_{AB}) , on aura :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = -\frac{\mathrm{d}U_{AB}}{\mathrm{d}r}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{AB}(r(t))$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E_{cin}(t) + U_{AB}(r(t))\right] = 0$$

Ainsi, la quantité $E = E_{cin}+U_{AB}$ se conserve, on l'appelle *énergie mécanique*.

X-5 Limites du modèle.

Ce modèle donne de bons résultats pour les interactions gravitationnelles et pour les interactions électromagnétiques tant que la matière reste électriquement neutre pratiquement jusqu'à l'échelle atomique. Son défaut essentiel est qu'elle suppose que les interactions soient instantanées, ce qui n'est pas la cas entre particules électriquement chargées, car les équations de Maxwell ont pour solutions des phénomènes propagatifs. Dans des situations où la matière n'est plus localement neutre, on peut toutefois rétablir des lois de conservation en donnant au champ électomagnétique une quantité de mouvement, un moment cinétique et une énergie ; démarche qui, du reste, sera utilisée pour établir la relation de Poynting en électromagnétisme. Mais ceci déborde largement de notre champ d'étude.